


- 3.34 Daný je štvorsten  $ABCD$ ,  $A[1, 2, -2]$ ,  $B[-1, -3, -1]$ ,  $C[2, 3, -3]$ ,  $D[1, -1, 2]$ . Vypočítajte uhol dvoch mimobežných hrán štvorstena.

### VZÁJOMNÁ POLOHA DVOCH ROVÍN

-  3.35 Rozhodnite o vzájomnej polohe rovín  $\rho$ ,  $\sigma$ , ktorých parametrické vyjadrenie je takéto:


$$\begin{array}{ll} \text{a) } \rho: x = 2 + 3u - v & \sigma: x = 1 - 2s + t \\ y = 1 - 9u + v & y = 2s - 3t \\ z = -3 - 12u - 2v & z = 2 - 4s - 4t, \\ u, v \in R & s, t \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } \rho: x = 2 + u - v & \sigma: x = 4 - s + t \\ y = 1 - 3u + v & y = -7 + s - 3t \\ z = -3 - 4u - 2v, & z = -17 - 2s - 4t \\ u, v \in R & s, t \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \rho: x = 3 + 2u - 3v & \sigma: x = 3 + 4s + t \\ y = -3u + v & y = -6s \\ z = -2 + u + v, & z = -2 + 2s - t, \\ u, v \in R & s, t \in R \end{array}$$

- 3.36 Ukážte, že roviny  $5x - 3y + 2z - 5 = 0$ ,  $2x - y - z - 1 = 0$  sú rôznobežné a zapíšte parametrické vyjadrenie priesečnice týchto rovín.

- 3.37 Vypočítajte odchýlku osi  $x$  a priesečnice rovín  $2x + y - z + 3 = 0$ ,  $x - y + 4z = 0$ .

-  3.38 Určte vzájomnú polohu dvoch rovín a v prípade, keď sú rôznobežné, určte aj ich priesečnicu:

a)  $2x - 5y + 4z - 10 = 0$ ,  $4x - 10y + 8z - 10 = 0$

b)  $2x - 5y + 4z - 10 = 0$ ,  $x - y - z - 2 = 0$

c)  $2x - 5y + 4z - 10 = 0$ ,  $4x - 10y - 2z - 10 = 0$

- 3.39 Priamku, ktorej parametrické vyjadrenie je  $x = 3 - 2t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $z = -5 + 3t$ ,  $t \in R$  určte ako priesečnicu dvoch rovín.

- +3.40 Priamku z predchádzajúcej úlohy vyjadrite ako priesečnicu dvoch

rovín, z ktorých každá je rovnobežná s niektorou zo súradnicových osí.

- +3.41 Napište rovnice rovín, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami a v ktorých leží priamka

$$x = 4 - 2t, y = 3 - t, z = -1 + t, t \in R.$$

### VZÁJOMNÁ POLOHA PRIAMKY A ROVINY

- 3.42 Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky  $\rho$  a roviny  $\rho$ , ak sú dané parametricky:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \rho: x = 1 - 2r + 5s & \rho: x = 4 - 3t \\ y = 2 + 2r & y = 5 - 3t \\ z = 4s, r, s \in R & z = 4 - 4t, t \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } \rho: x = 2 - r + 3s & \rho: x = 4 + 5t \\ y = 3r - 4s & y = 3 - 5t \\ z = 7 + 2r, r, s \in R & z = 1 + 2t, t \in R \end{array}$$

- 3.43 Rozhodnite o vzájomnej polohe roviny  $\rho$  a priamky  $\rho$ , ak platí:

a)  $\rho: x - 5y + 4z - 6 = 0$


$\rho: x = 2 - t, y = 3t, z = 3 + 4t, t \in R$

b)  $\rho: 3x + y - 3z - 13 = 0$

$\rho: x = 3 - 2t, y = 1 + 3t, z = -1 - t, t \in R$

c)  $\rho: 2x - 7y + z - 5 = 0$

$\rho: x = 4 - t, y = 8 - 3t, z = 3 + 2t, t \in R$

-  3.44 Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky  $AB$  a roviny  $\rho$ , ak platí:

a)  $A[2, -3, -2]$ ,  $B[3, -1, 1]$ ,  $\rho: x = 2 + r - s$ ,  $y = 1 + 3r$ ,  $z = 3 + 2r + 4s$ ,  $r, s \in R$

b)  $A[6, -3, -5]$ ,  $B[7, -1, -5]$ ,  $\rho: x = 3 - r + s$ ,  $y = 5 + 3s$ ,  $z = 9 + 4r + 2s$ ,  $r, s \in R$

- 3.45 Zistite vzájomnú polohu priamky  $AB$  a roviny  $\rho$ , ak platí:

a)  $A[1, -4, -1]$ ,  $B[7, -4, 1]$ ,  $\rho: x + 2y - 3z + 4 = 0$

b)  $A[7, -2, -3]$ ,  $B[4, -1, 0]$ ,  $\rho: 2x - 4y + 7z - 3 = 0$

- 3.46 Ukážte, že priamka  $AB$ , kde  $A[3, -2, -1]$ ,  $B[4, 1, 3]$ , je rôznobežná s rovinou  $2x - 3y + z - 2 = 0$ . Potom nájdite súradnice ich priesečníka.

- 3.47 Dokážte, že body  $K[-1, 2, -3]$ ,  $L[-2, 3, -1]$  ležia v opačných polpriestoroch ohraničených rovinou  $x + 2y - 3z - 8 = 0$ . Nájdite priesečník  $P$  priamky  $KL$  s danou rovinou a ukážte, že leží na úsečke  $KL$ .
- 3.48 Nájdite spoločné body roviny  $2x - y + 3z - 7 = 0$  a priamky  $AB$ , ak  $A[3, -1, 4]$ ,  $B[4, -1, 2]$ .
- 3.49 Ukážte, že priamka  $x = 2 - t$ ,  $y = -1 + 3t$ ,  $z = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a rovina  $x = 6 + 3r - s$ ,  $y = 5 - r - 2s$ ,  $z = r + s$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$  sú rôznobežné. Určte aj súradnice ich priesečníka.
- 3.50 Zistite vzájomnú polohu a nájdite spoločné body priamky  $\rho$  a roviny  $\varrho$ , ak
- a)  $\rho: x = -1 + 2t$ ,  $y = 3 + 4t$ ,  $z = 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$   
 $\varrho: 3x - 3y + 2z - 5 = 0$
- b)  $\rho: x = 13 - 2t$ ,  $y = 1 - 3t$ ,  $z = 4 - 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$   
 $\varrho: x + 2y - 4z + 1 = 0$
- c)  $\rho: x = 7 + 5t$ ,  $y = 4 + t$ ,  $z = 5 + 4t$ ,  $t \in \mathbb{R}$   
 $\varrho: 3x - y + 2z - 5 = 0$
- 3.51 Dané sú body  $A[1, -1, 3]$ ,  $B[1, 2, -3]$ ,  $C[2, -3, 4]$ . Napíšte rovnicu roviny  $ABC$  a určte jej priesečníky so súradnicovými osami  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .
- 3.52 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom  $A[1, -3, 0]$  a je kolmá na priamku, ktorej parametrické vyjadrenie  $x = 1 + t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = -7 - 4t$ ;  $t \in \mathbb{R}$ . Potom určte vzájomnú polohu a spoločné body tejto roviny a priamky s parametrickým vyjadrením  $x = 5 + 3s$ ,  $y = 2s$ ,  $z = 1 + s$ ;  $s \in \mathbb{R}$ .
- 3.53 Určte reálne číslo  $m$  tak, aby priamka  $AB$ , kde  $A[3, -1, m]$ ,  $B[2, 1, 3]$  bola rovnobežná s rovinou  $2x - 3y + z - 7 = 0$ .
- 3.54 Určte vzájomnú polohu roviny  $x + 2y - z + 4 = 0$  a priamky, ktorá je priesečnicou rovín  $2x - y - 3z + 3 = 0$ ,  $3x + y - 4z + 7 = 0$ .
- 3.55 Dané sú body  $A[2, 0, 3]$ ,  $B[2, 2, -7]$ ,  $C[3, -1, -2]$  a rovina  $3x + y - 2z - 5 = 0$ .
- a) Napíšte rovnicu priamky  $\rho$ , ktorá prechádza bodom  $A$  a je rovnobežná s priamkou  $BC$ .

- b) Ukážte, že priamka  $\rho$  je rôznobežná s danou rovinou a nájdite ich priesečník.

3.56 Dané sú priamky  $m$ ,  $n$ ,  $\rho$ :

$$m: x = 5 + 3t, \quad y = 8 - 6t, \quad z = -6 + 9t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$n: x = 7 - 2r, \quad y = 4 + 4r, \quad z = -6r, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\rho: x = 10 + s, \quad y = 3 - 2s, \quad z = 2 + 3s, \quad s \in \mathbb{R}$$

- a) Určte vzájomnú polohu priamok  $m$ ,  $n$ ,  $\rho$ .
- b) Nájdite všeobecnú rovnicu roviny  $\varrho$ , ktorá prechádza bodom  $A[1, 1, -1]$  a je kolmá na priamku  $m$ .
- c) Zistite vzájomnú polohu a nájdite spoločné body priamky  $\rho$  a roviny  $\varrho$ .

3.57 Dané sú roviny  $\varrho: 5x - 3y + 2z - 5 = 0$ ,  $\sigma: 2x - y - z - 1 = 0$ ,  $\tau: 4x - 3y + 7z - 7 = 0$ .

- a) Určte parametrické vyjadrenie priesečnice  $\rho$  rovín  $\varrho$ ,  $\sigma$ .
- b) Zistite vzájomnú polohu priamky  $\rho$  a roviny  $\tau$ .

## UHOL DVOCH ROVÍN: UHOL PRIAMKY A ROVINY

3.58 Vypočítajte uhol dvoch rovín, ktoré sú určené všeobecnými rovnicami:

a)  $x + y + 2z - 5 = 0$ ,  $x - 2y - z + 3 = 0$

b)  $3x - 4y + z - 6 = 0$ ,  $2x + y - 2z + 1 = 0$

c)  $3x + 4y - 5z - 6 = 0$ ,  $4x - 5y + 3z + 2 = 0$

3.59 Vypočítajte uhol roviny určenej všeobecnou rovnicou  $3x + 5 = 0$  a roviny, ktorá je určená parametricky  $x = 3 + r - 2s$ ,  $y = 2 - r + 2s$ ,  $z = -1 - 4r$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .

3.60 Určte uhol priamky, ktorá je určená parametricky  $x = 5 + t$ ,  $y = 1 + 3t$ ,  $z = -2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a roviny, ktorá je určená všeobecnou rovnicou  $2x - y + 3z - 4 = 0$ .



- 3.61 Daná je priamka  $\rho: x = 1 + t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , rovina  $\varrho: 3y + 8 = 0$  a rovina  $\sigma: x = 5 - r - 3s$ ,  $y = 16 + r - 3s$ ,  $z = 3 + 4r$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .
- a) Vypočítajte uhol priamky  $\rho$  a roviny  $\varrho$ .

- b) Vypočítajte uhol priamky  $\rho$  a roviny  $\sigma$ .  
 c) Vypočítajte uhol rovin  $\rho$  a  $\sigma$ .

3.62 Určte uhol priamky  $\rho: x = -1 - t, y = -1 + 3t, z = t, t \in \mathbb{R}$  a súradnicovej roviny  $xy$ .

3.63 Daná je priamka  $\rho$  a rovina  $\rho$ :

$$\rho: x - y + z + 1 = 0 \quad \rho: x - y + z = 0$$

$$x + y + 3z - 3 = 0$$

- a) Vypočítajte uhol priamky  $\rho$  a roviny  $\rho$ .  
 b) Určte prienik priamky  $\rho$  a roviny  $\rho$ .

3.64 Daný je pravidelný štvorboký ihlan  $ABCDV$ , veľkosť jeho hrany podstavy  $a = 6$ , veľkosť výšky ihlana  $v = 3\sqrt{2}$ . Vhodne zvolte súradnicovú sústavu v priestore a vypočítajte uhol

- a) priamky  $AV$  a roviny podstavy ihlana,  
 b) roviny  $ADV$  a roviny podstavy ihlana.

3.65 Určte odchýlku dvoch susedných stien  $ABE$  a  $BCE$  pravidelného osemstena  $ABCDEFG$ . Zvolte súradnicovú sústavu v priestore tak, aby jej začiatok bol stredom štvorca  $ABCD$ .



3.66 Daný je štvorsten  $ABCD$ ,  $A[0, 1, 3]$ ,  $B[1, 0, 2]$ ,  $C[-2, -1, 5]$ ,  $D[0, -2, -6]$ . Vypočítajte

- a) uhol priamky  $AD$  a roviny  $ABC$ ,  
 b) uhol rovin  $ABC$  a  $ABD$ ,  
 c) uhol priamky  $DC$  a roviny  $ABD$ ,  
 d) uhol rovin  $ABC$  a  $BCD$ ,  
 e) obsah steny  $ABC$ ,  
 f) objem štvorstena  $ABCD$ .

+3.67 Lúč, ktorý vychádza z bodového zdroja  $P$ , sa odráža od rovinného rozhrania a po odraze dopadá do bodu  $M$ . Určte súradnice bodu odrazu  $N$ , ak vo zvolenej súradnicovej sústave v priestore súradnice bodu  $P$  sú  $[0, 0, 0]$ , bodu  $M$   $[1, -2, 2]$  a rovinné rozhranie je určené rovnicou  $x - y - 4z - 13 = 0$ .

## ÚLOHY O KOLMOSTI PRIAMOK A ROVÍN

3.68 Napište všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom  $M$  a je kolmá na priamku  $AB$ :

- a)  $M[3, -1, 6]$ ,  $A[3, 2, -1]$ ,  $B[5, -1, -3]$   
 b)  $M[5, -7, -11]$ ,  $A[-4, -3, -2]$ ,  $B[-1, 2, -3]$

3.69 Napište všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom  $A[7, -5, 3]$  a je kolmá na priamku  $\rho$ , ak

- a)  $\rho: x = 2 + 3t, y = 5t, z = 7 - 2t, t \in \mathbb{R}$   
 b)  $\rho: x = 1 + 4s, y = 17 - s, z = 29, s \in \mathbb{R}$

3.70 Napište všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom  $K[-6, 0, 13]$  a je kolmá na priamku  $\rho$ :

- a)  $\rho: 3x + 2y - z + 7 = 0$   
 $2x - y - 3z = 0$   
 b)  $\rho: 5x - y + 2z - 17 = 0$   
 $x - 9y - 4z + 1 = 0$

3.71 Dané sú body  $A, B$  a rovina  $\rho$ . Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi  $A, B$  a je kolmá na rovinu  $\rho$ , ak platí

- a)  $A[1, -1, 3]$ ,  $B[-2, -13, 2]$ ,  $\rho: 2x - 3y + 8z - 6 = 0$   
 b)  $A[2, -1, 3]$ ,  $B[4, 5, 7]$ ,  $\rho: 3x - 7y + 2z + 8 = 0$

3.72 Určte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou  $\rho$  a je na rovinu  $\rho$  kolmá, ak

- a)  $\rho: x = 1 + 6t, y = -3 - 3t, z = -2 + 3t, t \in \mathbb{R}$   
 $\rho: 6x - y + 4z + 7 = 0$   
 b)  $\rho: x = -6 - 2t, y = -7 + 4t, z = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$   
 $\rho: 2x - 4y - 2z + 19 = 0$

3.73 Určte súradnice päty kolmice, ktorá prechádza bodom  $K$  kolmo na priamku  $\rho$ , ak

- a)  $K[5, -7, 2]$ ,  $\rho: x = 1 - t, y = -4 + t, z = 7 + 3t, t \in \mathbb{R}$   
 b)  $K[2, 3, 0]$ ,  $\rho: x = -3 - 2t, y = -12 - 3t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$   
 c)  $K[4, -1, 13]$ ,  $\rho: x = 3 - 4t, y = -4 + 3t, z = 2 - 5t, t \in \mathbb{R}$ .

3.74 Daný je bod  $A$  a dve roviny  $\rho, \sigma$ . Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom  $A$  a je kolmá na rovinu  $\rho$  a  $\sigma$ , ak

a)  $A[1, -2, 4]$ ,  $\rho: 2x + y - 3z + 7 = 0$   
 $\sigma: x - 2y - z + 4 = 0$

b)  $A[3, 1, -1]$ ,  $\rho: x + 3y - 2z + 16 = 0$   
 $\sigma: 5x - y + z + 9 = 0$

3.75 Nájdiť všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi  $M$ ,  $N$  a je kolmá na rovinu  $\rho$ , ak

a)  $M[4, 2, -2]$ ,  $N[-3, -1, 3]$ ,  $\rho: x = 3 - 2t + s$ ,  $y = 2 - 4t + 3s$ ,  $z = 4 + t - 3s$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$

b)  $M[5, -6, 6]$ ,  $N[-2, 3, 8]$ ,  $\rho: x = 7 + t + 2s$ ,  $y = 1 + 7t - 2s$ ,  $z = 3 - 4t$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$

3.76 Daná je priamka  $\rho = AB$ ,  $A[-4, -4, 1]$ ,  $B[-1, -3, 2]$  a rovina  $\rho = KLM$ ,  $K[2, -5, -6]$ ,  $L[-1, 0, 3]$ ,  $M[3, -3, 2]$ . Nájdiť všeobecnú rovnicu roviny, v ktorej leží priamka  $\rho$  a ktorá je kolmá na rovinu  $\rho$ .

3.77 Určte obraz bodu  $A[3, -4, -6]$  v súmernosti, ktorá je určená rovinou  $x - y - 4z - 13 = 0$ .

3.78 Určte obraz bodu  $M[0, -1, 6]$  v súmernosti, ktorá je určená rovinou  $ABC$ , ak  $A[-6, 1, -5]$ ,  $B[7, -2, -1]$ ,  $C[10, -7, 1]$ .

3.79 Určte obraz bodu  $K[2, 6, 8]$  v súmernosti, ktorá je určená rovinou  $x = 1 - r + s$ ,  $y = 1 - r$ ,  $z = 6 + s$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .

3.80 Určte obraz bodu  $A[1, 10, -8]$  v súmernosti, ktorá je určená priamkou  $x = 1 - 2t$ ,  $y = 3 + t$ ,  $z = -1 + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

3.81 Daná je rovina  $\rho: 2x + 3y - z - 6 = 0$  a priamka  $\rho: x = 1 - t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $z = 4 + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Napište parametrické vyjadrenie priamky  $q$ , ktorá je pravouhlým priemetom priamky  $\rho$  do roviny  $\rho$ .


3.82 V kocke  $ABCDEFGH$  sú dané roviny  $AFH = \rho$  a  $CGE = \sigma$ . Dokážte, že platí  $\rho \perp \sigma$ .

3.83 Napište všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečnicou rovin  $\rho$ ,  $\sigma$  a je kolmá na rovinu  $\tau$ , ak  
 $\rho: x - y + 1 = 0$ ,  $\sigma: 2x + y + z = 0$ ,  
 $\tau: 2x + y - z + 3 = 0$ .

3.84 Dané sú body  $A[-2, 2]$ ,  $B[6, 8]$ . Napište rovnicu priamky  $\rho$ , ktorá prechádza bodom  $A$  a rovnicu priamky  $q$ , ktorá prechádza bodom  $B$  tak, aby priamky  $\rho$ ,  $q$  boli navzájom kolmé a aby ich priesečník ležal na osi  $x$ .

## VZDIALENOSŤ BODU OD PRIAMKY A ROVINY

3.85 Vypočítajte vzdialenosť bodu  $A[5, -1, 3]$  od priamky, ktorej parametrické vyjadrenie  $x = -1 + 2t$ ,  $y = -5 + 3t$ ,  $z = -2 + 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

 3.86 Určte vzdialenosť bodu  $M[3, -1, 4]$  od priamky  $AB$ , ak  $A[0, 2, 1]$ ,  $B[1, 3, 0]$ .

3.87 Určte vzdialenosť bodu  $B[1, 2, 3]$  od priamky, ktorá je určená bodom  $A[5, 10, -1]$  a vektorom  $u = [-1, -2, 1]$ .

3.88 Vypočítajte vzdialenosť bodu  $A[1, 3]$  od priamky  $x = 1 - 3t$ ,  $y = -2 + 4t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

3.89 Vypočítajte vzdialenosť bodu  $B[3, -7]$  od priamky  $4x - 3y + 7 = 0$ .

3.90 Nájdiť všeobecnú rovnicu priamok, ktoré prechádzajú bodom  $A[2, 3]$  a majú od bodu  $B[0, -1]$  vzdialenosť  $v = 4$ .

3.91 Dané sú body  $M[-2, 3]$ ,  $A[5, -1]$ ,  $B[3, 7]$ . Určte všetky priamky  $\rho$ , ktoré prechádzajú bodom  $M$  a majú od bodov  $A$ ,  $B$  rovnakú vzdialenosť.

3.92 Na priamke  $x + 2y - 5 = 0$  nájdite bod, ktorý má od priamky  $3x - 4y - 5 = 0$  vzdialenosť  $v = 2$ .

3.93 Vypočítajte dĺžku výšky  $v$ , v trojuholníku  $ABC$ , ak  $A[1, 3]$ ,  $B[-3, 0]$ ,  $C[4, -2]$ .

3.94 Vypočítajte vzdialenosť bodu  $A$  od roviny  $\rho$ , ak

a)  $A[3, 5, -6]$ ,  $\rho: 2x - 2y + z - 8 = 0$

b)  $A[-1, 3, 2]$ ,  $\rho: 3x - 4y + 5z + 15 = 0$

3.95 Dané sú body  $A[1, -2, -2]$ ,  $B[2, -1, -1]$ ,  $C[1, -1, -2]$ ,  $D[0, 2, -2]$ .